Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $U_n = \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ fois}}$

1) $U_n = 1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 10^k$.

U_n est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q=10$ et de 1er terme 1

$U_n = \frac{10^n - 1}{10-1} = \frac{10^n - 1}{9}$ D'où $9U_n = 10^n - 1$

$a \in \mathbb{Z}^*$, $\forall m \in \mathbb{Z}$

$a / b \Rightarrow a / bm$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

i) $U_n \equiv 0\,[\text{mod } 7] \Rightarrow 7 / U_n \Rightarrow 7 / 9U_n \Rightarrow 7 / 10^n - 1$

Etudions, selon les valeurs de n, le reste de la division euclidienne de 10^n par 7, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$10^1 \equiv 3\,[7]$; $10^2 \equiv$

Exercice N°1 : 3 POINTS 15 mn

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $u_n = \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ fois}}$.

1) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $9u_n = 10^n - 1$.

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n \equiv 0[\text{mod}7] \Leftrightarrow n \equiv 0[\text{mod}6]$.

3) En déduire le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \equiv 0[\text{mod}63]$.

Exercice N°2 : 3 POINTS 15 mn

1) Soit x un entier relatif.

a) Justifier que $3x \equiv 8 \pmod{10} \Leftrightarrow x \equiv 6 \pmod{10}$

b) Montrer alors que $x^2 \equiv 6 \pmod{10} \Leftrightarrow (x \equiv 4 \pmod{10}$ ou $x \equiv 6 \pmod{10})$

2) Soit n un entier naturel.

a) Prouver que $n^2+(n+1)^2+(n+2)^2 \equiv 0 \pmod{10} \Leftrightarrow (n+1)^2 \equiv 6 \pmod{10}$

b) En déduire les entiers naturels multiples de 10 et inférieurs à 5000 qui sont la somme des carrés de trois nombres consécutifs.

Exercice N°3 : 4 POINTS 25 mn

Soient p et q deux nombres premiers distincts.

1)a) Justifier que $p^{q-1} \equiv 1[\text{mod}q]$ et que $q^{p-1} \equiv 1[\text{mod}p]$.

b) Montrer alors que $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1[\text{mod}pq]$.

c) En déduire que l'équation (E) : $(p^{q-1} + q^{p-1})x + pqy \equiv x + 1[\text{mod}pq]$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

2) Soit $a \in \mathbb{Z}$ tel que $a \wedge p = 1$ et $a \wedge q = 1$.

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E') : $ax \equiv 1[\text{mod}pq]$.

a) Montrer que $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1[\text{mod}pq]$. En déduire que : $27^{4200} \equiv 1[4331]$.

b) Déterminer une solution particulière x_0 de l'équation (E').

c) Montrer que $a \wedge pq = 1$ puis résoudre, dans $\mathbb{Z}$, l'équation (E').

à effectuer la division euclidienne de n par 6

Soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de n par 6 : $n = 6q + r \; ; 0 \leq r \leq 5$

$\Rightarrow 10^n = 10^{6q+r} = (10^6)^q \cdot 10^r$ or $10^6 \equiv 1 \; [7]$

$\Rightarrow 10^n \equiv 10^r \; [7] \quad ; r \in \{0,1,2,3,4,5\}$

1) Si $n = 6q$ ($q \in \mathbb{N}$) Alors $10^n \equiv 1 \; [7]$.

$n \equiv \ldots (6)$	0	1	2	3	4	5
$10^n \equiv \ldots (7)$	1	3	2	6	4	5

$10^n \equiv 1 \; [7]$ ssi $n \equiv 0 \; [6]$

Exercice N°1 : 3 POINTS 15 mn

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $u_n = \underbrace{11\ldots1}_{n \text{ fois}}$.

1) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $9u_n = 10^n - 1$.

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n \equiv 0[\text{mod}7] \Leftrightarrow n \equiv 0[\text{mod}6]$.

3) En déduire le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \equiv 0[\text{mod}63]$.

Exercice N°2 : 3 POINTS 15 mn

1) Soit x un entier relatif.

a) Justifier que $3x \equiv 8 \pmod{10} \Leftrightarrow x \equiv 6 \pmod{10}$

b) Montrer alors que $x^2 \equiv 6 \pmod{10} \Leftrightarrow (x \equiv 4 \pmod{10}$ ou $x \equiv 6 \pmod{10})$

2) Soit n un entier naturel.

a) Prouver que $n^2+(n+1)^2+(n+2)^2 \equiv 0 \pmod{10} \Leftrightarrow (n+1)^2 \equiv 6 \pmod{10}$

b) En déduire les entiers naturels multiples de 10 et inférieurs à 5000 qui sont la somme des carrés de trois nombres consécutifs.

Exercice N°3 : 4 POINTS 25 mn

Soient p et q deux nombres premiers distincts.

1)a) Justifier que $p^{q-1} \equiv 1[\text{mod}q]$ et que $q^{p-1} \equiv 1[\text{mod}p]$.

b) Montrer alors que $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1[\text{mod}pq]$.

c) En déduire que l'équation (E) : $(p^{q-1} + q^{p-1})x + pqy \equiv x + 1[\text{mod}pq]$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

2) Soit $a \in \mathbb{Z}$ tel que $a \wedge p = 1$ et $a \wedge q = 1$.

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E') : $ax \equiv 1[\text{mod}pq]$.

a) Montrer que $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1[\text{mod}pq]$. En déduire que : $27^{4200} \equiv 1[4331]$.

b) Déterminer une solution particulière x_0 de l'équation (E').

c) Montrer que $a \wedge pq = 1$ puis résoudre, dans $\mathbb{Z}$, l'équation (E').

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1} 10^k$$

On a $10 \equiv 1\,[9] \Rightarrow 10^k \equiv 1\,[9]\ \forall k \in \{0, \dots, n-1\}$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} 10^k \equiv \sum_{k=0}^{n-1} 1\ [9]$$

$$\Rightarrow U_n \equiv n\ [9]$$

D'où $\boxed{U_n \equiv 0\,[9] \text{ ssi } n \equiv 0\,[9]}$ (ii)

Ainsi $U_n \equiv 0\,[63] \Leftrightarrow n \equiv 0\,[6]$ et $n \equiv 0\,[9]$

$\Leftrightarrow$

Exercice N°1 : 3 POINTS 15 mn

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $u_n = \underbrace{11\dots1}_{n \text{ fois}}$.

1) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $9u_n = 10^n - 1$.

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n \equiv 0[\text{mod}7] \Leftrightarrow n \equiv 0[\text{mod}6]$.

3) En déduire le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \equiv 0[\text{mod}63]$.

Exercice N°2 : 3 POINTS 15 mn

1) Soit x un entier relatif.

a) Justifier que $3x \equiv 8 \pmod{10} \Leftrightarrow x \equiv 6 \pmod{10}$

b) Montrer alors que $x^2 \equiv 6 \pmod{10} \Leftrightarrow (x \equiv 4 \pmod{10}$ ou $x \equiv 6 \pmod{10})$

2) Soit n un entier naturel.

a) Prouver que $n^2+(n+1)^2+(n+2)^2 \equiv 0 \pmod{10} \Leftrightarrow (n+1)^2 \equiv 6 \pmod{10}$

b) En déduire les entiers naturels multiples de 10 et inférieurs à 5000 qui sont la somme des carrés de trois nombres consécutifs.

Exercice N°3 : 4 POINTS 25 mn

Soient p et q deux nombres premiers distincts.

1)a) Justifier que $p^{q-1} \equiv 1[\text{mod}q]$ et que $q^{p-1} \equiv 1[\text{mod}p]$.

b) Montrer alors que $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1[\text{mod}pq]$.

c) En déduire que l'équation (E) : $(p^{q-1} + q^{p-1})x + pqy \equiv x + 1[\text{mod}pq]$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

2) Soit $a \in \mathbb{Z}$ tel que $a \wedge p = 1$ et $a \wedge q = 1$.

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E') : $ax \equiv 1[\text{mod}pq]$.

a) Montrer que $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1[\text{mod}pq]$. En déduire que : $27^{4200} \equiv 1[4331]$.

b) Déterminer une solution particulière x_0 de l'équation (E').

c) Montrer que $a \wedge pq = 1$ puis résoudre, dans $\mathbb{Z}$, l'équation (E').

Exercice N°2

Soit $x \in \mathbb{Z}$

$x \equiv \ldots [10]$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$3x \equiv \ldots [10]$	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7

$$3x \equiv 8\,[10] \iff x \equiv 6\,[10]$$

Autrement :

"$\Leftarrow$" $x \equiv 6\,[10] \Rightarrow 3x \equiv 18\,[10] \equiv 8\,[10]$

"$\Rightarrow$" $3x \equiv 8\,[10] \Rightarrow 3x \equiv 18\,[10]$

$\Rightarrow 3x - 18 \equiv 0\,[10]$

$\Rightarrow 10 \,/\, 3x - 18 \Rightarrow 10 \,/\, 3(x-6)$

Exercice N°1 : 3 POINTS 15 mn

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $u_n = \underbrace{11\ldots1}_{n \text{ fois}}$.

1) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $9u_n = 10^n - 1$.

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n \equiv 0[\text{mod}7] \Leftrightarrow n \equiv 0[\text{mod}6]$.

3) En déduire le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \equiv 0[\text{mod}63]$.

Exercice N°2 : 3 POINTS 15 mn

1) Soit x un entier relatif.

a) Justifier que $3x \equiv 8 \pmod{10} \Leftrightarrow x \equiv 6 \pmod{10}$

b) Montrer alors que $x^2 \equiv 6 \pmod{10} \Leftrightarrow (x \equiv 4 \pmod{10}$ ou $x \equiv 6 \pmod{10})$

2) Soit n un entier naturel.

a) Prouver que $n^2+(n+1)^2+(n+2)^2 \equiv 0 \pmod{10} \Leftrightarrow (n+1)^2 \equiv 6 \pmod{10}$

b) En déduire les entiers naturels multiples de 10 et inférieurs à 5000 qui sont la somme des carrés de trois nombres consécutifs.

Exercice N°3 : 4 POINTS 25 mn

Soient p et q deux nombres premiers distincts.

1)a) Justifier que $p^{q-1} \equiv 1[\text{mod}q]$ et que $q^{p-1} \equiv 1[\text{mod}p]$.

b) Montrer alors que $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1[\text{mod}pq]$.

c) En déduire que l'équation (E) : $(p^{q-1} + q^{p-1})x + pqy \equiv x + 1[\text{mod}pq]$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

2) Soit $a \in \mathbb{Z}$ tel que $a \wedge p = 1$ et $a \wedge q = 1$.

On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E') : $ax \equiv 1[\text{mod}pq]$.

a) Montrer que $a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1[\text{mod}pq]$. En déduire que : $27^{4200} \equiv 1[4331]$.

b) Déterminer une solution particulière x_0 de l'équation (E').

c) Montrer que $a \wedge pq = 1$ puis résoudre, dans $\mathbb{Z}$, l'équation (E').